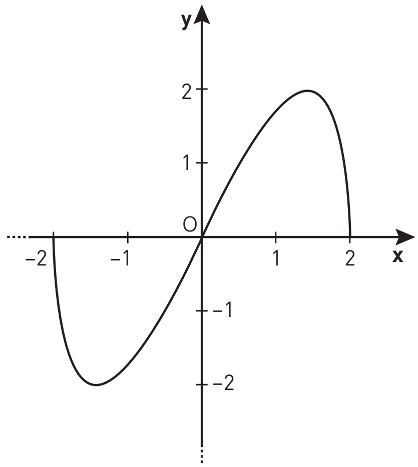
PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva di equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$ con $0 \leq x \leq 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?



▲ Figura 2.

PROBLEMA 2

1. Il dominio della funzione $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ è l'intervallo $[-2; 2]$; per determinare i suoi massimo e minimo assoluti dobbiamo calcolarne la derivata prima e studiarne il segno:

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{con } -2 < x < 2.$$

Essa risulta:

- positiva per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ $\to$ $f(x)$ crescente;
- nulla per $x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$ $\to$ $f(x)$ ha punti stazionari;
- negativa per $-2 < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < 2$ $\to$ $f(x)$ decrescente.

In figura 6 è riportato il quadro della funzione e della sua derivata prima.

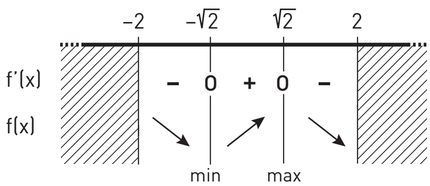


Figura 6.

Osservando che $f(-2) = f(2) = 0$ la funzione $f(x)$ ha minimo assoluto in $x = -\sqrt{2}$ con $f(-\sqrt{2}) = -2$ e massimo assoluto in $x = \sqrt{2}$ con $f(\sqrt{2}) = 2$.

2. Una funzione ha grafico simmetrico rispetto all'origine di riferimento O se la funzione è dispari ovvero se $f(-x) = -f(x)$; verifichiamo se vale tale uguaglianza:

$$f(-x) = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x),$$

pertanto la funzione $f(x)$ ha grafico Γ simmetrico rispetto a O.
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto $x = 0$, ricordando che equivale alla derivata prima della funzione calcolata in quel punto:

$$f'(x) = 2\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad \to \quad f'(0) = m = 2.$$

L'angolo α che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x è rappresentata dall'arcotangente del valore di m ovvero:

$$\alpha = \operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg} 2 = 63{,}43\ldots° \simeq 63°\ 26'.$$

3. L'equazione di quarto grado in due variabili $y^2 = x^2(4 - x^2)$ non rappresenta una funzione, ma la non negatività del primo membro impone al dominio della variabile x la condizione

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Ricaviamo la y dall'equazione di partenza:

$$y = \pm |x| \sqrt{4 - x^2}.$$

Il grafico dell'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ corrisponde all'unione dei grafici delle funzioni:

$$y = |x|\sqrt{4 - x^2} \quad \vee \quad y = -|x|\sqrt{4 - x^2}$$

cioè all'unione del grafico di $|f(x)|$ e del suo simmetrico rispetto all'asse x, $-|f(x)|$.
Noto il grafico Γ di $f(x)$, rappresentiamo in figura 7 i grafici di $|f(x)|$ e $-|f(x)|$.

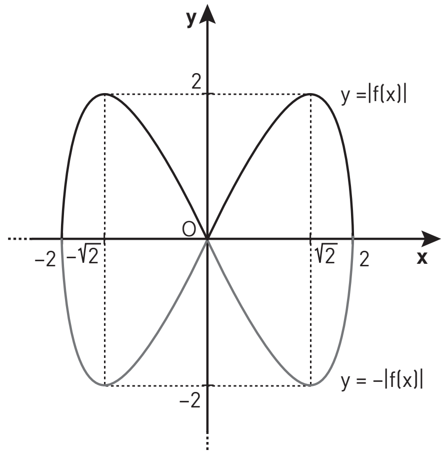


Figura 7.

Sfruttando la simmetria centrale del grafico della funzione $f(x)$, l'area della parte di piano racchiusa dall'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è uguale a 4 volte l'area compresa tra Γ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [0; 2]:

$$\mathcal{A} = 4\int_0^2 f(x)dx = 4\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx = -2\int_0^2 -2x(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -2\left[\frac{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{3}\left[0 - 4^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{4}{3}\cdot(-8) = \frac{32}{3}.$$

4. Sia $h(x) = \text{sen}(x\sqrt{4 - x^2})$ con $0 \leq x \leq 2$. Per determinare quanti punti del grafico di $h(x)$ hanno ordinata 1 osserviamo (figura 8) che in tale intervallo la funzione $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ assume valori compresi tra 0 e 2 e in particolare acquista il valore $\frac{\pi}{2}$ in due punti x_1 e x_2, per cui $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Quindi i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1 sono due.

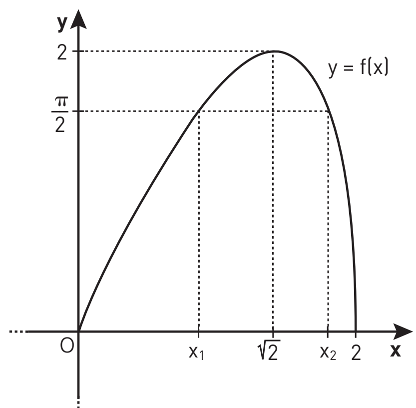


Figura 8.

Deduciamo l'andamento della funzione $h(x) = \text{sen}(f(x))$ basandoci sulle conoscenze della funzione goniometrica e valutando il grafico Γ di $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$:

– agli estremi dell'intervallo $h(0) = h(2) = 0$;

– per $0 < x < x_1$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow$ $h(x)$ crescente e $0 < h(x) < 1$;

– per $x = x_1$, $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $h(x_1) = 1$;

– per $x_1 < x < \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow$ $h(x)$ decrescente e $\operatorname{sen} 2 < h(x) < 1$;

– per $x = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = 2$ $\rightarrow$ $h(\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$;

– per $\sqrt{2} < x < x_2$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $h(x)$ crescente e $\operatorname{sen} 2 < h(x) < 1$;

– per $x = x_2$, $f(x_2) = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $h(x_2) = 1$;

– per $x_2 < x < 2$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $h(x)$ decrescente e $0 < h(x) < 1$.

Rappresentiamo in figura 9 l'andamento di $f(x)$ e di $h(x)$. La funzione $h(x)$ presenta:
– due massimi assoluti nei punti x_1 e x_2, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
– due minimi assoluti in $x = 0$ e $x = 2$ con $h(0) = h(2) = 0$;
– un minimo relativo in $x = \sqrt{2}$, con $h(\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$.

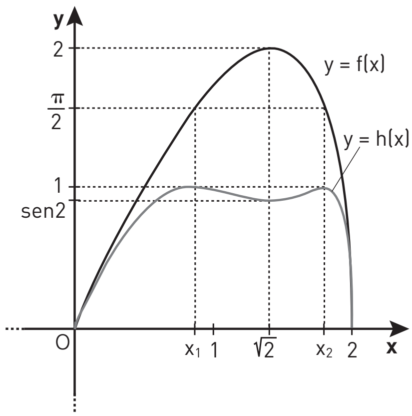


Figura 9.

Osservando il grafico di $h(x)$, l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte quando una retta $y = k$ interseca il grafico in quattro punti distinti ovvero per $\operatorname{sen} 2 < k < 1$.