PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

PROBLEMA 2

1. Una funzione f, continua in $[a; b]$, con $f(a) \neq f(b)$, assume, almeno una volta, nell'interno di tale intervallo, un qualsiasi valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. (Teorema dei valori intermedi, o di Darboux)

La funzione $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare nell'intervallo chiuso limitato $[a; b]$. In tale intervallo la funzione assume ogni valore compreso tra $f(a) = a$ e $f(b) = b$, in particolare il valore $\frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$.

2. Ponendo $a = 2b = 2$ si ottiene $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2}\text{sen}(\pi x) + x$.

$g(-x) = -g(x)$, la funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi. $g(0) = 0$, il grafico passa per l'origine.

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

$g'(x) = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi x) + 1 > 0$, se $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi}$. La rappresentazione grafica di $g'(x)$ (figura 8) mostra che $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$, con $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ e $k \in \mathbb{Z}$.

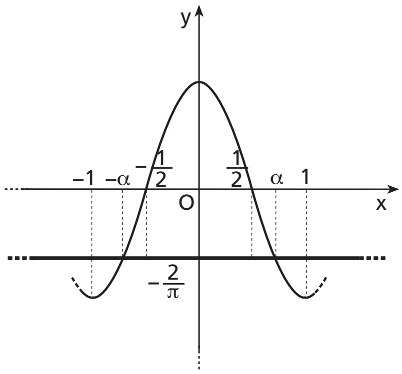

Figura 8.

Si hanno quindi punti di minimo relativo per $x = -\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ e punti di massimo relativo per $x = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ (vedi figura 9).

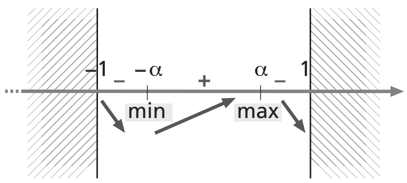

Figura 9.

$g''(x) = -\dfrac{\pi^2}{2}\operatorname{sen}(\pi x) > 0$, se $\operatorname{sen}(\pi x) < 0$, tale condizione è verificata per $1 + 2k < x < 2 + 2k$. Si hanno punti di flesso per $x = 1 + 2k$ e $x = 2 + 2k$. Il grafico di g è rappresentato in figura 10.

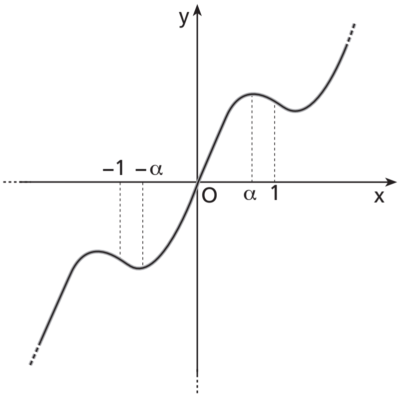

Figura 10.

3. Al punto precedente si è ottenuto: $g'(\alpha) = \dfrac{\pi \cdot \cos \pi}{2} + 1 = 0$.

Considerando che: $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 > 0$ e

$g'(1) = -\dfrac{\pi}{2} + 1 < 0$, segue che $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

Si applica il metodo di bisezione a $g'(x)$, ottenendo:

c	*f(c)*	α
$0{,}75 = (0{,}5 + 1)/2$	$-0{,}11 < 0$	$0{,}5 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}625 = (0{,}5 + 0{,}75)/2$	$-0{,}40 > 0$	$0{,}625 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}6875 = (0{,}625 + 0{,}75)/2$	$-0{,}13 > 0$	$0{,}6875 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}71875 = (0{,}6875 + 0{,}75)/2$	…	…

Si arriva infine al valore $\alpha \cong 0{,}72$.