

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009**

■ **PROBLEMA 1**

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x)$ ha dominio \mathbb{R} ed è continua e derivabile in tale campo, poiché è prodotto di una funzione polinomiale per una funzione esponenziale.

Calcoliamo la derivata di $f(x)$ utilizzando la regola del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{2x}{2!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)(-e^{-x}) = \\ &= \left(1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} = \\ &= \left(1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} = \end{aligned}$$

osservando che nella parentesi dell'ultima espressione sono presenti n coppie formate da monomi opposti, risulta:

$$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

2. Studiamo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0 \rightarrow x^n \leq 0,$$

poiché $-e^{-x} < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Distinguiamo lo studio del segno per n pari ed n dispari.

- Se n è pari:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x^n \leq 0 \rightarrow x = 0.$$

Il quadro del segno è riportato in figura 3.

In $x=0$ la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale. Perciò, se n è pari, la funzione non ammette né minimi né massimi.

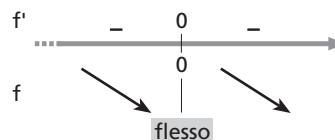
- Se n è dispari:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x^n \leq 0 \rightarrow x \leq 0.$$

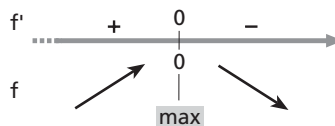
Il quadro del segno della derivata prima è rappresentato in figura 4.

In $x=0$ la funzione ammette un unico massimo assoluto. Poiché $f(0) = 1$, il punto di massimo assoluto ha coordinate $(0;1)$.

In particolare, se n è dispari, $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.



▲ Figura 3.



▲ Figura 4.

3. Studiamo la funzione $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$. Essa ha come dominio \mathbb{R} , non interseca l'asse x poiché il polinomio $1 + x + \frac{x^2}{2}$ ha discriminante negativo, interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0;1)$, è sempre positiva nel suo dominio e non è né pari né dispari.
- Calcoliamo ora i limiti per agli estremi del campo di esistenza:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^x}.$$

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando due volte il Teorema di De L'Hospital si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y=0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} = +\infty,$$

non vi è però asintoto obliquo poiché risulta infinito il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

Scriviamo la funzione derivata prima $g'(x)$ utilizzando l'espressione di $f'(x)$ calcolata nel punto 1 del problema, assumendo $n=2$; si ottiene:

$$g'(x) = -\frac{x^2}{2} e^{-x}.$$

Come già evidenziato, poiché $n=2$ è pari, la funzione g è sempre decrescente ed è priva di minimi e massimi.

Studiamo la derivata seconda e il relativo quadro del segni (figura 5):

$$g''(x) = -xe^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x} = \frac{x^2 - 2x}{2} e^{-x};$$

$$g''(x) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 2.$$

La funzione presenta due flessi nei punti di coordinate $F_1(0; 1)$ e $F_2(2; 5e^{-2})$.

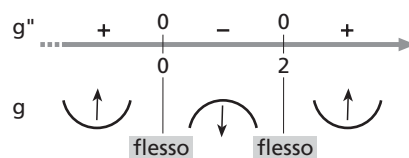
Osserviamo che in F_1 il flesso è a tangente orizzontale poiché in $x=0$ si annulla anche la derivata prima.

In figura 6 è riportato il grafico della funzione $g(x)$.

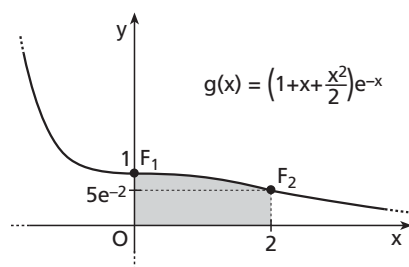
4. Considerato l'integrale $\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx$, integriamolo due volte per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx &= \left[-e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \right]_0^2 + \int_0^2 (1+x) e^{-x} dx = -5e^{-2} + 1 + [-e^{-x}(1+x)]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = \\ &= -5e^{-2} + 1 - 3e^{-2} + 1 - [-e^{-x}]_0^2 = -8e^{-2} + 2 - (e^{-2} - 1) = 3 - 9e^{-2}. \end{aligned}$$

Tale integrale rappresenta l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x nell'intervallo $[0; 2]$ (figura 6).



▲ Figura 5.



▲ Figura 6.