3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$.
La retta generica r passante per il punto B e non parallela all'asse y ha equazione:

$$r_m: y - y_B = m(x - x_B) \quad \rightarrow \quad y + 8 = m(x+6) \quad \rightarrow \quad mx - y + 6m - 8 = 0.$$

Ricaviamo la distanza $d(m)$ tra il punto $A(2; -1)$ e la retta r:

$$d(m) = \frac{|m \cdot 2 - (-1) + 6m - 8|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|8m-7|}{\sqrt{m^2+1}} = \begin{cases} \dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m \geq \dfrac{7}{8} \\ -\dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m < \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

Determiniamo gli eventuali massimi della funzione d studiando la sua derivata prima:

$$d'(m) = \begin{cases} \dfrac{8\sqrt{m^2+1} - (8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m \geq \dfrac{7}{8} \\ -\dfrac{8\sqrt{m^2+1} - (8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m < \dfrac{7}{8} \end{cases} \rightarrow d'(m) = \begin{cases} \dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m \geq \dfrac{7}{8} \\ -\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m < \dfrac{7}{8} \end{cases}.$$

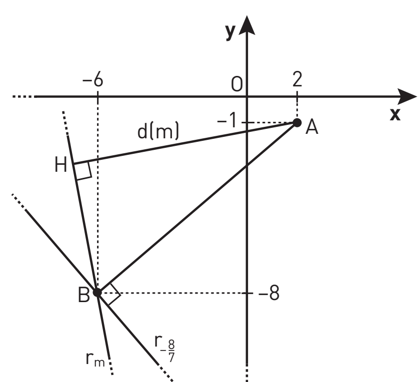
Osserviamo che:

- per $m \geq \frac{7}{8}$, $d' > 0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $-\frac{8}{7} < m < \frac{7}{8}$, $d' < 0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente decrescente;
- per $m < -\frac{8}{7}$, $d' > 0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $m = -\frac{8}{7}$, $d' = 0$ $\rightarrow$ la funzione ha un massimo relativo.

Si conclude che la retta passante per B e avente distanza massima da A ha equazione:

$$r_{-\frac{8}{7}}: y + 8 = -\frac{8}{7}(x+6) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}.$$

Rappresentiamo nella figura 10 la generica retta r_m, la retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e tracciamo le distanze dal punto A da queste rette: osserviamo che la retta AB, avente coefficiente angolare $m_{AB} = \frac{-8+1}{-6-2} = \frac{7}{8}$, è perpendicolare alla retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e che la distanza massima è proprio rappresentata dal segmento AB, ipotenusa del triangolo ABH.



▲ **Figura 10.**