3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$.

La retta generica r passante per il punto B e non parallela all'asse y ha equazione:

$$r_m\colon y-y_B=m(x-x_B) \quad\rightarrow\quad y+8=m(x+6) \quad\rightarrow\quad mx-y+6m-8=0.$$

Ricaviamo la distanza $d(m)$ tra il punto $A(2; -1)$ e la retta r:

$$d(m)=\frac{|m\cdot 2-(-1)+6m-8|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|8m-7|}{\sqrt{m^2+1}}=\begin{cases}\dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\[2mm] -\dfrac{8m-7}{\sqrt{m^2+1}}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}$$

Determiniamo gli eventuali massimi della funzione d studiando la sua derivata prima:

$$d'(m)=\begin{cases}\dfrac{8\sqrt{m^2+1}-(8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\[2mm] -\dfrac{8\sqrt{m^2+1}-(8m-7)\left(\dfrac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}\right)}{m^2+1}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}\rightarrow d'(m)=\begin{cases}\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m\geq\dfrac{7}{8}\\[2mm] -\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}}, & m<\dfrac{7}{8}\end{cases}.$$

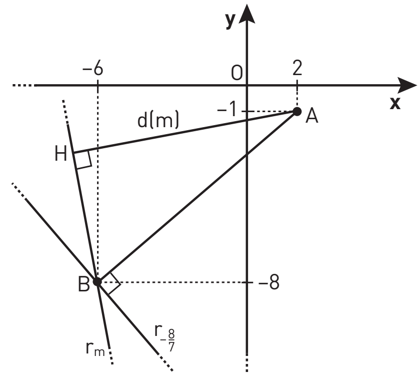
Osserviamo che:

- per $m\geq\frac{7}{8}$, $d'>0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $-\frac{8}{7}<m<\frac{7}{8}$, $d'<0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente decrescente;
- per $m<-\frac{8}{7}$, $d'>0$ $\rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- per $m=-\frac{8}{7}$, $d'=0$ $\rightarrow$ la funzione ha un massimo relativo.

Si conclude che la retta passante per B e avente distanza massima da A ha equazione:

$$r_{-\frac{8}{7}}\colon y+8=-\frac{8}{7}(x+6) \quad\rightarrow\quad y=-\frac{8}{7}x-\frac{104}{7}.$$

Rappresentiamo nella figura 10 la generica retta r_m, la retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e tracciamo le distanze dal punto A da queste rette: osserviamo che la retta AB, avente coefficiente angolare $m_{AB}=\frac{-8+1}{-6-2}=\frac{7}{8}$, è perpendicolare alla retta $r_{-\frac{8}{7}}$ e che la distanza massima è proprio rappresentata dal segmento AB, ipotenusa del triangolo ABH.



▲ **Figura 10.**