

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012**

- 6** Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno e un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012

6 La funzione polinomiale $y = x^3 + ax + b$ è continua e derivabile nel suo dominio \mathbb{R} . Calcoliamo le funzioni derivata prima e seconda:

$$y' = 3x^2 + a; \quad y'' = 6x.$$

Analizziamo il segno della derivata seconda nel dominio:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0; \quad y'' < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

È pertanto soddisfatta la condizione sufficiente di flesso: la funzione ammette uno e un solo flesso nel punto $x = 0$ e ha coordinate $(0; b)$.

Costruiamo la trasformazione geometrica di simmetria centrale $(0; b)$:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

Sostituiamo nella funzione $y = x^3 + ax + b$:

$$2b - y' = -x'^3 - ax' + b \rightarrow y' = x'^3 + ax' + b.$$

La funzione è unita rispetto al suo punto di flesso che risulta quindi punto di simmetria.