

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2010**

- 5** Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Qual è la capacità del serbatoio?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

5 Dato il cono circolare retto in figura 8, sia x l'altezza, r il raggio del cerchio di base e $a = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$ l'apotema. Omettendo l'unità di misura, il raggio r e il volume V del cono risultano rispettivamente:

$$r = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}, \text{ con } 0 < x < 8;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{\pi}{3} (64 - x^2)x = \frac{\pi}{3} (64x - x^3).$$

Consideriamo la funzione:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (64x - x^3), \text{ con } 0 < x < 8,$$

calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno nell'intervallo dei limiti geometrici:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} (64 - 3x^2),$$

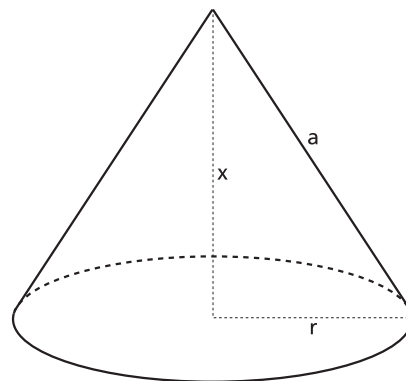
$$V'(x) = 0 \quad \text{per } x = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \quad V'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \frac{8\sqrt{3}}{3}, \quad V'(x) < 0 \quad \text{per } \frac{8\sqrt{3}}{3} < x < 8.$$

Pertanto il volume del cono è massimo per $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ e vale:

$$V\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(64 - \frac{64}{3}\right) \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27} \text{ dm}^3.$$

Poiché $1 \text{ dm}^3 = 1 \ell$, il volume in litri del serbatoio vale:

$$V = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27} \text{ dm}^3 = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27} \ell \approx 206,4 \ell.$$



▲ Figura 8.