8 Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

8 La funzione polinomiale $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ è continua e derivabile nel campo reale. Essa ha degli estremanti solo se la sua derivata prima, $f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$, non ha segno costante. Ciò avviene se il discriminante di $f'(x)$ risulta strettamente maggiore di zero, cioè:

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a > 0 \rightarrow a < -\frac{9}{4} \vee a > 0.$$

Si può concludere che per $a < -\frac{9}{4} \vee a > 0$ la funzione f ha estremanti, mentre per $-\frac{9}{4} \leq a < 0$ non ne ha.

Si noti che nel caso limite $a = -\frac{9}{4}$ la derivata prima diventa:

$$f'(x) = \frac{27}{4}x^2 - 9x - 3 = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Essa si annulla nel punto $x = -\frac{3}{2}$ ed è negativa per ogni altro valore di x. In tal caso la funzione non ha estremanti e ha in $x = -\frac{3}{2}$ un punto di flesso orizzontale.