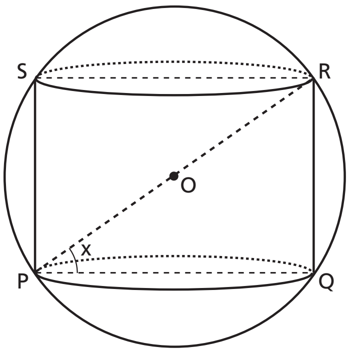
6 Si calcoli l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.

6 Consideriamo un cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $PO = \sqrt{3}$ (figura 13).



◀ **Figura 13.**

Il segmento PR è un diametro della sfera e misura $2\sqrt{3}$. Indichiamo con x l'angolo $R\hat{P}Q$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$QR = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$, $PQ = 2\sqrt{3}\cos x$.

Calcoliamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \cdot QR.$$

Sostituiamo:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}\cos x}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x \rightarrow V(x) = 6\sqrt{3}\pi\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x \rightarrow$$

$$\rightarrow V(x) = 6\sqrt{3}\pi(\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}^3 x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$V'(x) = 6\sqrt{3}\pi(\cos x - 3\cos x\,\mathrm{sen}^2 x) \rightarrow V'(x) = 6\sqrt{3}\pi\cos x(1 - 3\mathrm{sen}^2 x),$$

$V'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$,

– $V'(x) = 0$ per $x = \mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$,

– $V'(x) < 0$ per $\mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

Pertanto la funzione $V(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Determiniamo la corrispondente altezza e il raggio r di base:

$$QR = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2,$$

$$r = \frac{PQ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}}}{2} = \sqrt{2}.$$