6 Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

6 Consideriamo una sfera di raggio $OR = 10$ cm e un cono a esso inscritto (figura 12).

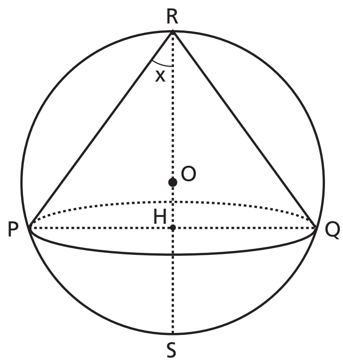

Figura 12.

Il segmento RS è un diametro della sfera e misura 20 cm. Per semplicità tralasciamo, per il momento, l'unità di misura. Indichiamo con x l'angolo $P\hat{R}S$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$$\overline{PR} = \overline{RS} \cdot \cos x = 20 \cos x, \qquad \overline{PH} = \overline{PR} \cdot \operatorname{sen} x = 20 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Calcoliamo la superficie laterale $S(x)$ del cono inscritto:

$$S(x) = \pi \cdot \overline{PH} \cdot \overline{PR},$$

sostituiamo:

$$S(x) = \pi(20 \operatorname{sen} x \cos x \cdot 20 \cos x) = 400\pi \cos^2 x \operatorname{sen} x = 400\pi(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $S'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$S'(x) = 400\pi(\cos x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x) = 400\pi \cos x(1 - 3\operatorname{sen}^2 x),$$

$$S'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S'(x) = 0 \quad \text{per } x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S'(x) < 0 \quad \text{per } \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto la funzione $S(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il cono di superficie laterale massima ha apotema, raggio di base e altezza rispettivamente:

$$\overline{PR} = 20\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 20\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{20}{3}\sqrt{6} \text{ cm},$$

$$\overline{PH} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20}{3}\sqrt{6} = \frac{40}{3}\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$\overline{RH} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{\frac{2400}{9} - \frac{800}{9}} = \frac{40}{3} \text{ cm}.$$