

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2008**

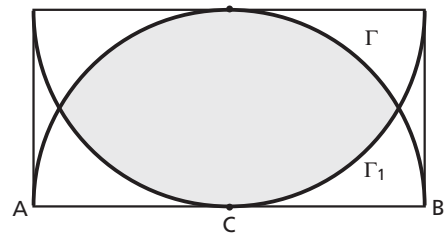
■ **PROBLEMA 2**

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$ (figura 2), si affrontino le seguenti questioni.

- a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1 .
- b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ .
- c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ , H la sua proiezione ortogonale su AB . Si ponga $\widehat{PCB} = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH .

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

- d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.



▲ **Figura 2.**

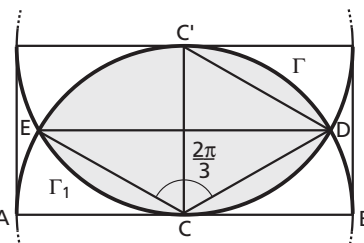
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2008

PROBLEMA 2

- a) Indicate con E e D le intersezioni delle semicirconferenze corrispondenti ai due semicerchi, congiungiamo i punti E con D e C con C' . Consideriamo i lati del triangolo CDC' i cui vertici sono i centri C e C' dei due semicerchi Γ e Γ_1 e uno dei due punti di intersezione tra di essi (figura 7). Risulta:

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= 1 \text{ perché } D \text{ appartiene a } \Gamma, \\ \overline{C'D} &= 1, \text{ perché } D \text{ appartiene a } \Gamma_1, \\ \overline{CC'} &= 1, \text{ per costruzione.}\end{aligned}$$

Il triangolo CDC' è pertanto equilatero e l'angolo \widehat{ECD} misura $\frac{2}{3}\pi$. A



▲ Figura 7.

L'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi risulta uguale al doppio della differenza tra l'area del settore circolare \widehat{ECD} e l'area del triangolo ECD :

$$\text{Area} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- b) Consideriamo il semicerchio Γ e assumiamo come incognita l'angolo $\alpha = \widehat{ECF}$ (figura 8).

Le limitazioni affinché il rettangolo non sia degenerare sono:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Dalla trigonometria risulta:

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{CF} \cdot \sin \alpha \rightarrow \overline{EF} = \sin \alpha, \\ \overline{DE} &= 2 \cdot \overline{CE} = 2 \cdot \overline{CF} \cdot \cos \alpha \rightarrow \overline{DE} = 2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

L'area del rettangolo $GDEF$ vale:

$$R(\alpha) = \overline{EF} \cdot \overline{DE} \rightarrow R(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

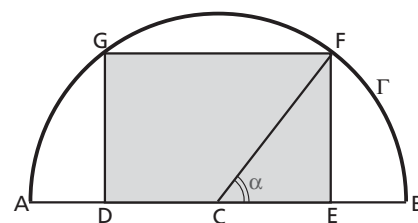
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$R'(\alpha) \geq 0 \text{ per } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \quad R'(\alpha) < 0 \text{ per } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

La funzione area $R(\alpha)$ assume valore massimo per $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

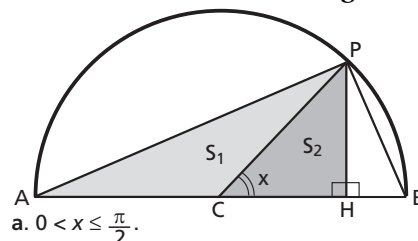
In tal caso l'area massima del rettangolo vale 1 e le corrispondenti dimensioni sono:

$$\overline{DE} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



▲ Figura 8.

- c) Se P è un punto della semicirconferenza di Γ , H la sua proiezione ortogonale su AB e $\widehat{PCB} = x$, si osservano dalla figura 9 due possibili configurazioni a seconda della variabilità dell'angolo x . Nel primo caso l'angolo x è acuto o retto $\left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, mentre nel secondo caso è ottuso $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$.



▼ Figura 9.

a. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Caso a: $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

Le misure dei lati dei triangoli PCH e APH , utili per determinare le aree, sono:

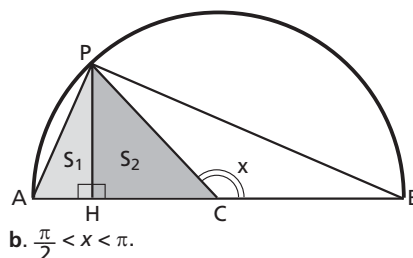
$$PH = \sin x, \quad CH = \cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$$

Le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2} \sin x (1 + \cos x), \quad S_2(x) = \frac{1}{2} \sin x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_1(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$



Caso b: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Le misure dei lati dei triangoli PCH e APH , utili per determinare le aree, sono:

$$PH = \sin(\pi - x) = \sin x, \quad CH = \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$$

Quindi le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2} \sin x (1 + \cos x), \quad S_2(x) = \frac{1}{2} \sin x (-\cos x) = -\frac{1}{2} \sin x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_2(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = -\frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

d) Prescindendo dai limiti geometrici del problema risulta $f_1(x) = -f_2(x)$, ovvero le due funzioni sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Pertanto si conviene di studiare la funzione

$$f_1(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 1.$$

Tale funzione è periodica, di periodo 2π : ci limitiamo a studiarla nell'intervallo $[0; 2\pi]$ nel quale è definita per $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

La curva interseca gli assi cartesiani in $(0; 2)$ e $(\pi; 0)$; è positiva per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$. I limiti nei punti di discontinuità valgono

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \mp \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi \pm} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \pm \infty,$$

pertanto la funzione ha asintoti verticali di equazioni $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

La derivata prima ha espressione e segno:

$$f'_1(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$f'_1(x) > 0 \text{ per } 0 < x < \pi,$$

$$f'_1(x) < 0 \text{ per } \pi < x < 2\pi.$$

Essa si annulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Pertanto la funzione ha un massimo relativo in $(\pi; 0)$ e minimi relativi in $(0; 2)$ e $(2\pi; 2)$.

Studiamo la concavità di $f_1(x)$, tramite il segno di f'' che ha espressione:

$$f''_1(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x},$$

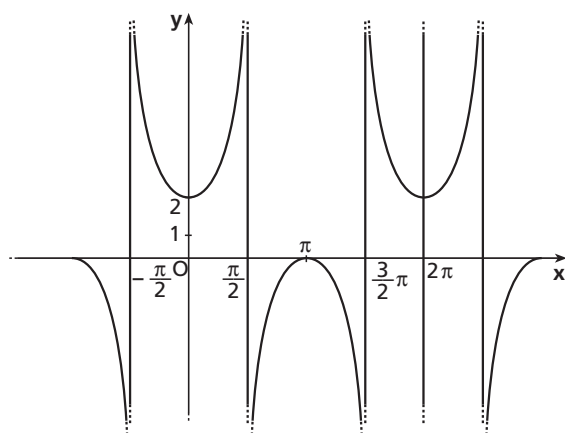
$$f''_1(x) > 0 \rightarrow \cos x > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee$$

$$\vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi,$$

$$f''_1(x) < 0 \text{ per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi.$$

La funzione ha concavità verso l'alto per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, verso il basso per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$.

Rappresentiamo in figura 10 il grafico di $f_1(x)$, tenendo conto della periodicità di 2π .



▲ Figura 10.