6 Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

6 Consideriamo un parallelepipedo con base quadrata di lato x e con altezza h (figura 13).

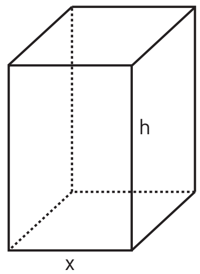

Figura 13.

Calcoliamo il volume del parallelepipedo e poniamolo uguale a 5 L:

$$x^2h = 5\text{L} = 5\ \text{dm}^3.$$

Ricaviamo h e ommettiamo le unità di misura:

$$h = \frac{5}{x^2},\ \text{con } x > 0.$$

Determiniamo la funzione S della superficie totale della lattina:

$$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{5}{x^2} = 2x^2 + \frac{20}{x}.$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$S'(x) = 4x - \frac{20}{x^2} = 4\frac{x^3 - 5}{x^2},$$

$$S'(x) > 0 \ \rightarrow \ x > \sqrt[3]{5}.$$

Pertanto la funzione:
- è decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{5}$;
- è crescente per $x > \sqrt[3]{5}$;
- ha un minimo per $x = \sqrt[3]{5}$.

In conclusione, le dimensioni di una lattina arrotondate ai mm sono:

$$x = \sqrt[3]{5} \simeq 1{,}71\ \text{dm} = 171\ \text{mm}; \qquad h = \frac{5}{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5} \simeq 1{,}71\ \text{dm} = 171\ \text{mm}.$$

Se ne deduce che, a parità di volume, il parallelepipedo che ha superficie totale minima è un cubo.