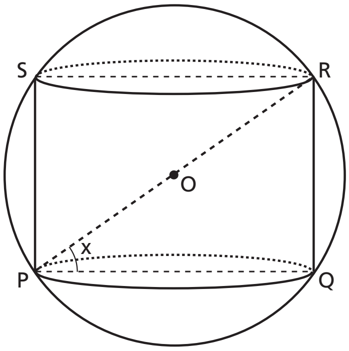
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

1 Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

1 Consideriamo un cilindro inscritto in una sfera di raggio $PO = 60$ cm (figura 10).



◀ **Figura 10.**

Il segmento PR è un diametro della sfera e misura 120 cm. Per semplicità tralasciamo provvisoriamente le unità di misura. Indichiamo con x l'angolo $R\hat{P}Q$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$$QR = 120 \operatorname{sen} x, \quad PQ = 120 \cos x.$$

Calcoliamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \cdot QR,$$

sostituiamo:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{120 \cos x}{2}\right)^2 \cdot 120 \operatorname{sen} x \quad \to \quad V(x) = 432\,000\pi \cos^2 x \operatorname{sen} x \quad \to$$

$$\to \quad V(x) = 432\,000\pi(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x), \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$V'(x) = 432\,000\pi(\cos x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x) \quad \to \quad V'(x) = 432\,000\pi \cos x(1 - 3\operatorname{sen}^2 x),$$

$$V'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{per } x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$V'(x) < 0 \quad \text{per } \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto la funzione $V(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$. Il corrispondente volume ha valore in cm^3:

$$V_{max} = V\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 432\,000\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \text{cm}^3 = 432\,000 \cdot \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3 = 96\,000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Tenendo conto che 1 cm^3 equivale a 10^{-3} L, la capacità in litri del serbatoio iniziale risulta:

$$V = V_{max} = 96\,000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 96\pi\sqrt{3} \text{ L} \simeq 522{,}37 \text{ L}.$$