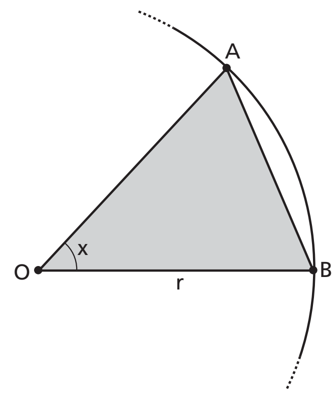
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da
   $S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \text{sen}\, x)$ con $x \in [0; 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $A\widehat{O}B$ pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di $A\widehat{O}B$ e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $A\widehat{O}B$ è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



▶ **Figura 1.**

PROBLEMA 1

1. Indichiamo con:

$S(A\widehat{O}B)$ l'area del settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio r e ampiezza x,

$S(AOB)$ l'area del triangolo isoscele AOB,

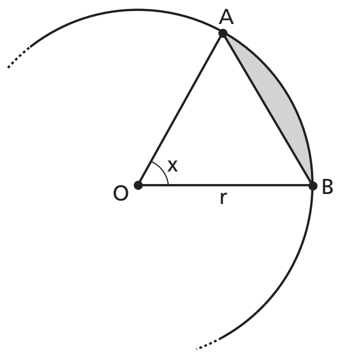
$S(x)$ la superficie compresa fra l'arco e la corda AB.

Differenziamo i casi in cui l'angolo x del settore circolare è convesso o concavo (figura 3):

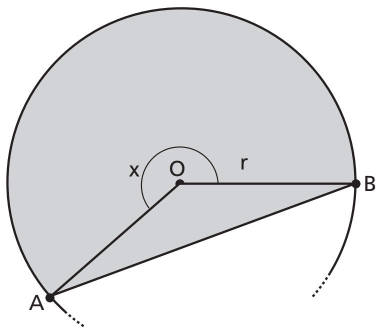
a) se x è convesso ($0 \leq x < \pi$) risulta $S(x) = S(A\widehat{O}B) - S(AOB)$;

b) se x è concavo ($\pi \leq x \leq 2\pi$) risulta $S(x) = S(A\widehat{O}B) + S(AOB)$.

Figura 3.



a. Angolo x convesso.



b. Angolo x concavo.

L'area del settore circolare di raggio r e ampiezza x è $S(A\widehat{O}B) = \dfrac{r^2 x}{2}$, mentre l'area del triangolo AOB, conoscendo due lati e l'angolo compreso, è per la trigonometria:

$$S(AOB) = \begin{cases} \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \dfrac{r^2 \operatorname{sen}(2\pi - x)}{2} = -\dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Quindi la superficie $S(x)$ diventa:

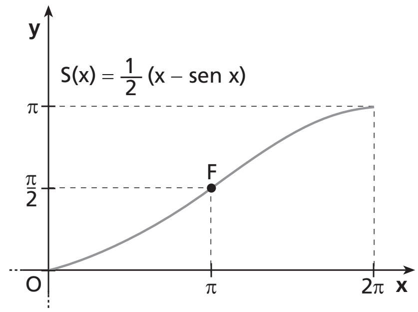
$$S(x) = \begin{cases} S(A\widehat{O}B) - S(AOB) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ S(A\widehat{O}B) + S(AOB) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow \quad S(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$S(x) = \frac{r^2 x - r^2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Ponendo $r = 1$, diventa $S(x) = \dfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x)$. Tale funzione è continua nell'intervallo di definizione $[0; 2\pi]$; agli estremi del dominio risulta $S(0) = 0$, $S(2\pi) = \pi$; la sua derivata prima ha espressione: $S'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos x)$. Pertanto risulta $S'(x) > 0$ per $0 < x < 2\pi$ e $S'(0) = S'(2\pi) = 0$: la funzione è non decrescente e ha tangente orizzontale negli estremi dell'intervallo.

La derivata seconda vale $S''(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$: è positiva per $0 < x < \pi$, negativa per $\pi < x < 2\pi$, nulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$; la curva ha pertanto un flesso $F\left(\pi; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Nella figura 4 è rappresentato il grafico della funzione $S(x)$.

▶ **Figura 4.**

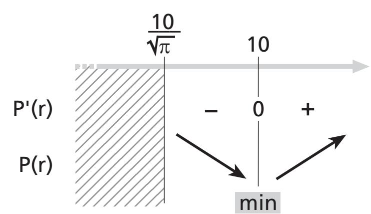


3. Posta l'area del settore circolare $S(A\widehat{O}B) = \dfrac{r^2 x}{2}$ uguale a 100 m², diventa $\dfrac{r^2 x}{2} = 100$, quindi $r = \sqrt{\dfrac{200}{x}}$ con $x \in \,]0; 2\pi]$; risulta allora che, al variare di x nell'intervallo, la variabile r è inferiormente limitata ovvero $r \geq \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Calcoliamo il perimetro P del settore $A\widehat{O}B$ in funzione del raggio r, considerando che si può scrivere l'angolo x in funzione del raggio r ovvero $x = \dfrac{200}{r^2}$:

$$P = r + r + rx \quad \rightarrow \quad P(r) = 2r + r\frac{200}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}.$$

▼ **Figura 5.**



Determiniamo la derivata prima di tale funzione e studiamone il segno:

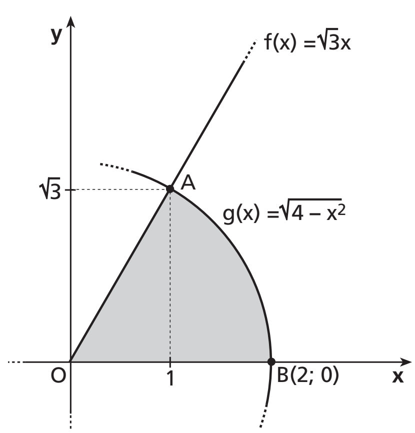
$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2};\ P'(r) > 0 \quad \rightarrow \quad r^2 > 100 \quad \rightarrow \quad r > 10.$$

In figura 5 è riportato il quadro dei segni.

La funzione ha un minimo per $r = 10$ m; in tal caso l'angolo corrispondente misura:

$$x = \frac{200}{10^2} = 2 \text{ rad} \simeq 57{,}3° \simeq 115°.$$

▼ **Figura 6.**



4. Posto $r = 2$ e $x = \dfrac{\pi}{3}$, fissiamo un sistema di riferimento ortogonale Oxy contenente il settore in modo che O coincida con l'origine; risulta allora che B ha coordinate $(2;0)$ e $A\ (1;\sqrt{3})$ (figura 6).

La retta OA ha equazione $f(x) = \sqrt{3}\,x$ mentre l'arco AB è il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, per $x \in [1; 2]$.

Poiché il solido W ha come base il settore circolare e ha sezioni ortogonali a OB quadrate, si ottiene il suo volume V secondo la seguente formula:

$$V(W) = \int_0^1 [f(x)]^2\, dx + \int_1^2 [g(x)]^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + \left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$