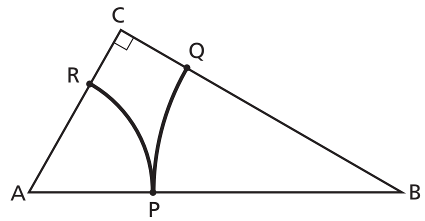
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2008

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$ (figura 1).

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.



▲ **Figura 1.**

b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

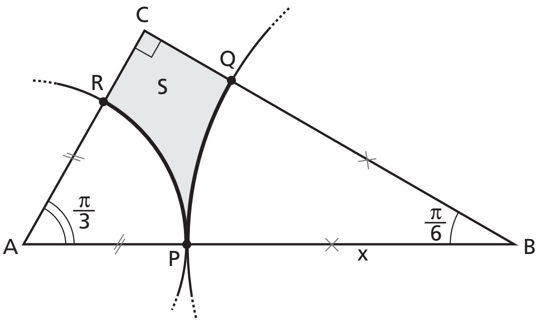
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutte quadrati.

PROBLEMA 1

a) Considerando il triangolo ABC, per costruzione si osserva che $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $AC = \frac{a}{2}$, $QB = PB = x$, $AR = AP = a - x$ (figura 4).
La costruzione è realizzabile fino al caso limite di coincidenza tra il punto Q e il punto C, e in tal caso $x = BC = a\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, e al caso limite di coincidenza tra il punto R e il punto C, cioè per $x = \frac{a}{2}$. I limiti geometrici per la x sono dunque:

$$\frac{a}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



▲ **Figura 4.**

b) L'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ (figura 4) si esprime come differenza tra l'area del triangolo ABC e la somma delle aree dei due settori circolari $Q\hat{B}P$ e $P\hat{A}R$, di raggi rispettivamente x e $a - x$. La funzione area $S = S(x)$ vale:

$$S = \text{Area}(ABC) - [\text{Area}(Q\hat{B}P) + \text{Area}(P\hat{A}R)] \rightarrow$$

$$\rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \left[\frac{\pi}{6}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}(a-x)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{12}[x^2 + 2(a-x)^2].$$

Per determinare i valori di massimo e minimo di $S(x)$ nell'intervallo $\frac{a}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}a$, calcoliamo la derivata prima e ne studiamo il segno:

$$S'(x) = -\frac{\pi}{6}[x - 2(a-x)] = -\frac{\pi}{6}(3x - 2a).$$

Lo studio del segno della derivata indica che:

$$S'(x) \ge 0 \text{ per } \frac{a}{2} \le x \le \frac{2}{3}a \text{ e } S'(x) < 0 \text{ per } \frac{2}{3}a < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Quindi il valore $x = \frac{2}{3}a$ è un punto di massimo; in tal caso l'area S è massima e vale:

$$S_{\max} = S\left(\frac{2}{3}a\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18}\right)a^2.$$

Per determinare il valore minimo di $S(x)$, dobbiamo valutare tale funzione nei punti estremi dell'intervallo di variabilità di x:

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)a^2 \simeq 0{,}02\,a^2,$$

$$S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right]a^2 \simeq 0{,}01\,a^2.$$

Poiché $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) < S\left(\frac{a}{2}\right)$, l'area minima si ottiene per $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ e il corrispondente valore vale:

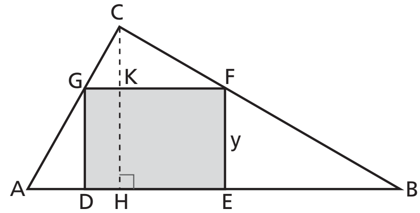
$$S_{\min} = S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right]a^2.$$

c) Consideriamo il rettangolo *DEFG* come in figura 5 e assumiamo come incognita y l'altezza DG.
Risulta $AB \cdot CH = AC \cdot BC$, da cui si ricava CH:

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

mentre

$$CK = CH - DG = \frac{\sqrt{3}}{4}a - y.$$



▲ **Figura 5.**

Consideriamo ora i triangoli *ABC* e *GFC*; essi sono simili per il Teorema di Talete e, in particolare, vale la proporzione tra basi e altezze: $AB : FG = CH : CK$.
Ricaviamo FG e sostituiamo le espressioni degli altri segmenti:

$$FG = \frac{AB \cdot CK}{CH} \rightarrow FG = \frac{a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a - y\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}a} = a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y.$$

La funzione $R(y)$, area del rettangolo inscritto nel triangolo *ABC*, risulta:

$$R(y) = \left(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y\right)y = ay - \frac{4\sqrt{3}}{3}y^2.$$

L'intervallo di variabilità di y è $0 < y < \frac{\sqrt{3}}{4}a$; nei casi in cui y uguaglia uno dei due estremi, il rettangolo *DEFG* degenera in un segmento.
Osserviamo che $R(y)$ è una funzione parabolica con concavità rivolta verso il basso e assume quindi il valore massimo nel suo vertice di ascissa:

$$y_V = \frac{\sqrt{3}}{8}a.$$

In corrispondenza di tale valore l'area R è massima e vale:

$$R_{\max} = R\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2.$$

d) Il solido W si compone di due piramidi aventi in comune la base quadrata $CHH'C'$ come in figura 6.
Una piramide ha altezza AH, mentre l'altra ha altezza BH. Ricordando la formula del volume della piramide, il volume del solido W risulta uguale a:

$$\frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} + \frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{HB} = \frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AB} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}.$$

▼ **Figura 6.**