ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

[1] $a+2x,\ a-x,\ 2a-x,$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x=\frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

PROBLEMA 2

a) Tenendo conto che x e a, in quanto lunghezze, sono non negative, le condizioni che devono essere soddisfatte sono la positività delle lunghezze dei lati e le disuguaglianze triangolari:

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \\ a+2x<a-x+2a-x \\ a-x<a+2x+2a-x \\ 2a-x<a+2x+a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2x>0 \ \text{ sempre verificato} \\ x<a \\ x<2a \\ x<\dfrac{a}{2} \\ 2x+2a>0 \ \text{ sempre verificato} \\ 2x>0 \ \text{ sempre verificato} \end{cases} \rightarrow \quad x<\frac{a}{2}.$$

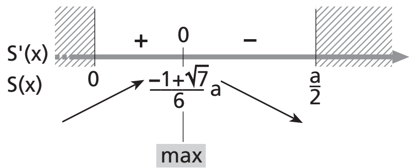
Per avere un triangolo non degenere deve essere $0<x<\dfrac{a}{2}$.

b) Per calcolare l'area del triangolo, noti i lati, si usa la formula di Erone:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ove p è il semiperimetro.

$p=2a \rightarrow S(x)=\sqrt{2a(a-2x)(a+x)\,x}=\sqrt{2a}\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}$.

La funzione S è continua nell'intervallo $\left]0;\dfrac{a}{2}\right[$; la sua derivata prima è $S'(x)=\sqrt{2a}\,\dfrac{-6x^2-2ax+a^2}{2\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}}$. Studiando il suo segno si ricava che $S'(x)>0$ quando $-6x^2-2ax+a^2>0$, che ha soluzione $0<x<a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Lo schema che si ottiene è il seguente (figura 2).



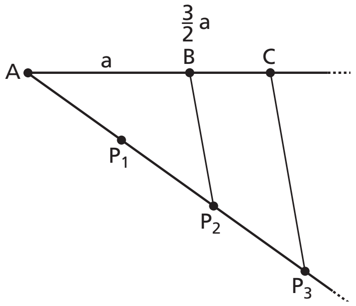
▲ **Figura 2.**

Pertanto il triangolo non degenere ha area massima per $x=a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Si osservi che per $x=0$ e $x=\dfrac{a}{2}$ la superficie assumerebbe il valore minimo zero ma questi casi corrispondono a triangoli degeneri.

c) Nel punto a) si è trovato che le lunghezze sono lati di un triangolo non degenere quando $0<x<\dfrac{a}{2}$, allora ciò è vero per $x=\dfrac{a}{4}$. In tal caso i lati hanno lunghezze $\dfrac{3}{2}a$, $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$, tutti e tre multipli di a secondo numeri razionali. Dato un segmento che assumiamo di lunghezza a, si costruisce il segmento di lunghezza $\dfrac{m}{n}a$, per esempio, $\dfrac{3}{2}a$, nel seguente modo (figura 3).

Tracciato il segmento AB che misura a, si disegna da A una semiretta non contenente B. Su essa si sceglie un generico punto P_1 e col compasso si riporta per tre volte (il massimo tra m e ed n nel caso generale) il segmento AP_1. Congiunto B con P_2, si manda da P_3 la parallela a BP_2. Il segmento AC per il teorema di Talete ha lunghezza $\dfrac{3}{2}a$.

Allo stesso modo si ottengono i segmenti di lunghezza $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$. La costruzione del triangolo ABC avviene nel piano con

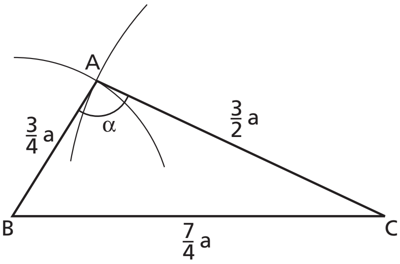


▲ **Figura 3.**

l'uso del compasso. Partendo, per esempio, dal segmento più lungo *BC* (figura 4), si riporta puntando il compasso prima in un estremo poi nell'altro rispettivamente i restanti segmenti trovati. L'intersezione dei due archi individua il punto *A*.
Si valuta il tipo di triangolo applicando il teorema trigonometrico di Carnot:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha.$$

Ricavando $\cos\alpha$ e sostituendo le lunghezze dei lati, si trova $\cos\alpha = -\frac{1}{9}$. Pertanto il triangolo è ottusangolo.



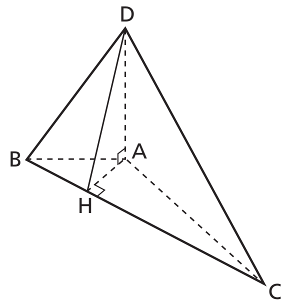
▲ **Figura 4.**

d) Compiuta la costruzione, si tracci da *A* la perpendicolare a *BC* e si consideri il triangolo rettangolo *HAD* (figura 5). L'angolo da valutare è $D\hat{H}A$.

Dai teoremi sui triangoli rettangoli si può scrivere:

$\operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{\overline{DA}}{\overline{HA}}$. $\overline{DA} = a$ per ipotesi, *HA* è l'altezza del triangolo *ABC* rispetto alla base *BC*. Pertanto se *S* è l'area del triangolo *ABC*, $\overline{HA} = \frac{2S}{\overline{BC}}$. Dal punto b) del problema si ricava:

$$S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{2a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{5a}{4}\cdot\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2.$$



▲ **Figura 5.**

Quindi: $\overline{HA} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{4}a^2}{\frac{7}{4}a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a$ e $\operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{7}{10}\sqrt{5}$, da cui $D\hat{H}A = \operatorname{arctg}\frac{7}{10}\sqrt{5}$. Utilizzando la calcolatrice scientifica si trova: $D\hat{H}A \simeq 57{,}4°$.