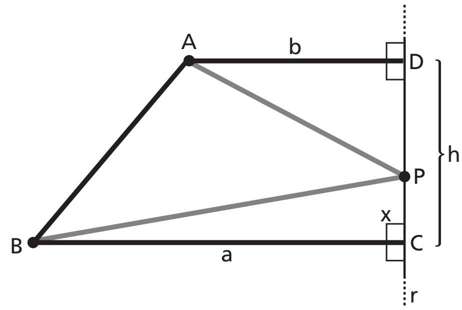
3 In un piano sono dati una retta r e due punti A e B a essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

3 Siano a e b le distanze di A e B dalla retta r e h la distanza tra le loro proiezioni D e C su r (figura 13).
Si considera il caso in cui il punto P sia interno al segmento $\overline{CD}$.
Posto $x = \overline{PC}$, con $0 \leq x \leq h$, risulta:

$$\overline{BP} = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$\overline{PD} = h - x,$$

$$\overline{AP} = \sqrt{b^2 + (h-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}.$$



▲ **Figura 13.**

È necessario minimizzare la funzione $f(x) = \overline{BP} + \overline{AP}$, ovvero:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}, \qquad 0 \leq x \leq h.$$

Si studia il segno della derivata prima f':

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - h}{\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}}.$$

Posto $f'(x) > 0$:

$$\frac{x\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2} + (x-h)\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}} > 0,$$

segue che:

$$x\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2} > (h - x)\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Si eleva al quadrato tenendo conto che $0 \leq x < h$:

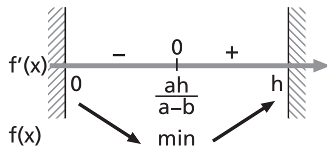
$$x^2(x^2 - 2hx + b^2 + h^2) > (h^2 + x^2 - 2hx)(a^2 + x^2)$$

$$x^4 - 2hx^3 + b^2x^2 + h^2x^2 > a^2h^2 + h^2x^2 + a^2x^2 + x^4 - 2a^2hx - 2hx^3$$

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2hx + a^2h^2 < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{ah}{a+b} < x < \frac{ah}{a-b}.$$

Poiché $0 \leq x \leq h$ e $\dfrac{ah}{a-b}$ è maggiore di h, si ottiene la seguente tabella del segno di $f'(x)$ (figura 14).
Si conclude che la funzione f ha un minimo per $x = \dfrac{ah}{a+b}$.



▲ **Figura 14.**

Qualora si prenda il punto P esterno al segmento CD, posto $x = \overline{PC}$, si trova che la funzione $g(x)$ da minimizzare è maggiore o uguale a $f(x)$, cioè $g(x) \geq f(x)$.
Pertanto il minimo m del cammino rimane per $x = \dfrac{ah}{a+b}$ e sostituendo nella funzione f si trova:

$$m = f\left(\frac{ah}{a+b}\right) = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}.$$

