PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?

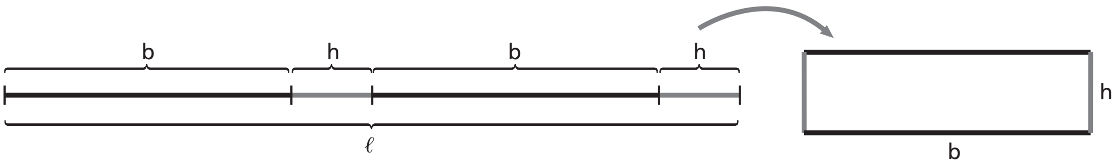
Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 1

a) Poiché la lunghezza del filo rappresenta il perimetro del rettangolo che delimita l'aiuola, detti b, h rispettivamente la base e l'altezza di tale rettangolo (figura 1), vale:

$$b+h=\frac{l}{2}.$$

▼ Figura 1.



Scelta b come incognita, si ha $h=\frac{l}{2}-b$, quindi la funzione area da massimizzare risulta la seguente:

$$\mathscr{A}(b)=b\cdot\left(\frac{l}{2}-b\right)=-b^2+\frac{l}{2}b,\qquad b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[.$$

Il grafico di $\mathscr{A}(b)$ è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice di ascissa $\frac{l}{4}$. Quindi il massimo della funzione è l'ordinata del vertice, cioè:

$$\max_{b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[}\mathscr{A}(b)=\mathscr{A}\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{l^2}{16}.$$

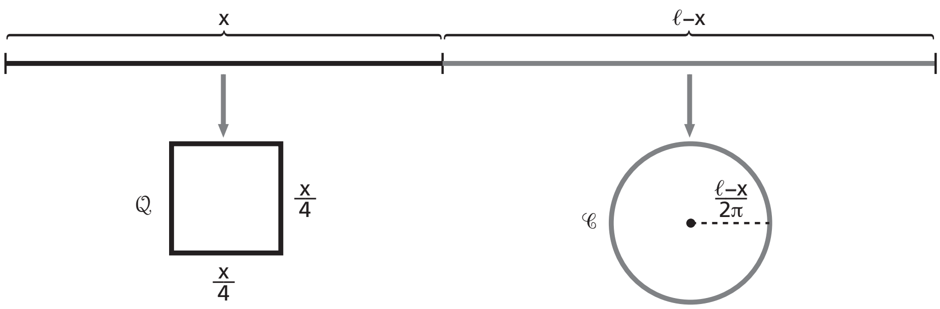
Si tratta del caso in cui l'aiuola ha la forma di un quadrato di lato $\frac{l}{4}$.

b) Si indica con x la parte del filo che si usa per delimitare l'aiuola di forma quadrata. La lunghezza del lato del quadrato $\mathscr{Q}$ è dunque $\frac{x}{4}$.

Di conseguenza, la lunghezza della circonferenza che delimita l'aiuola $\mathscr{C}$ di forma circolare è $l-x$; si ricava quindi il raggio r:

$$2\pi r=l-x \quad\Rightarrow\quad r=\frac{l-x}{2\pi}.$$

▼ Figura 2.



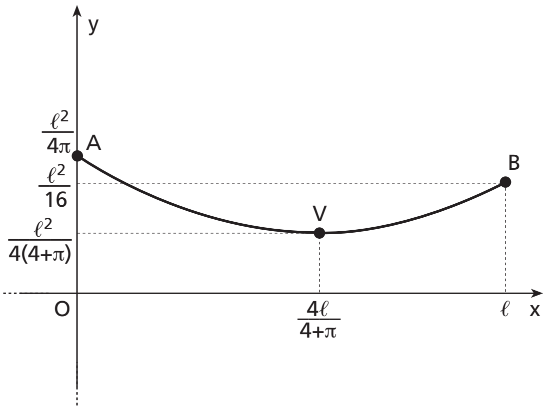
Si è ora in grado di calcolare le due aree:

$$\text{area}(\mathcal{Q}) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16};$$
$$\text{area}(\mathcal{C}) = \pi\left(\frac{l-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(l-x)^2}{4\pi}.$$

Sommando si ottiene la seguente funzione:

$$g(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right)x^2 - \frac{l}{2\pi}x + \frac{l^2}{4\pi}, \qquad x \in [0; l].$$

Il grafico di g è un ramo di parabola compreso tra i punti $A(0; g(0))$ e $B(l; g(l))$, con la concavità rivolta verso l'alto (figura 3). Si osserva che i casi $x=0$ e $x=l$ corrispondono entrambi all'utilizzo del filo intero (senza effettuare alcun taglio) per delimitare una sola aiuola di forma circolare ($x=0$) o una sola aiuola di forma quadrata ($x=l$).



▶ **Figura 3.**

La funzione $g(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti. Precisamente, detto V il vertice della parabola, il minimo di g è l'ordinata di V. Poiché $x_V = \dfrac{4l}{4+\pi}$, allora:

$$\min_{x\in[0;l]} g(x) = g\left(\frac{4l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}.$$

c) Il massimo di g viene assunto in uno degli estremi dell'intervallo di definizione. Osservando che:

$$\frac{l^2}{4\pi} = g(0) > g(l) = \frac{l^2}{16},$$

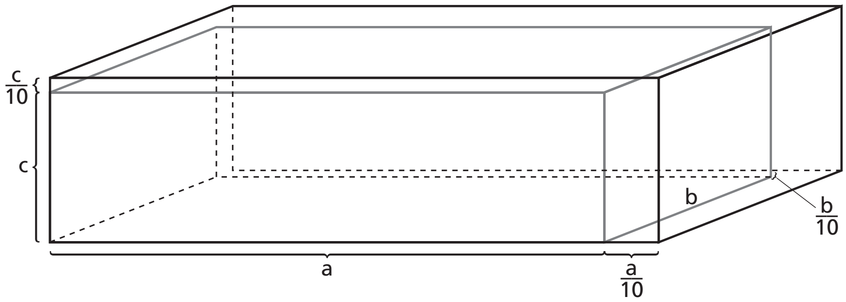
si conclude che $\max g(x) = \dfrac{l^2}{4\pi}$, cioè l'area massima si ottiene quando il filo non viene tagliato bensì utilizzato tutto per delimitare un'unica aiuola di forma circolare.

Si consideri ora un parallelepipedo a base rettangolare di dimensioni a, b, c. Il suo volume è:

$$V_1 = abc.$$

Incrementando del 10% ciascuna dimensione (figura 4), si ottiene un nuovo parallelepipedo di volume:

$$V_2 = \left(1+\frac{10}{100}\right)a \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)b \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)c = \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 abc = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc.$$



◀ **Figura 4.**

La differenza tra i due volumi risulta essere:

$$V_2 - V_1 = \left[\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1\right] abc.$$

In termini percentuali, pertanto, si ottiene:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1 = \frac{1331}{1000} - 1 = \frac{331}{1000} = 33{,}1\%.$$

