

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001  
Sessione ordinaria**

■ **PROBLEMA 2**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$  è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \ln(x + b), \text{ con } a \text{ e } b \text{ diversi da zero.}$$

- a) Si trovino i valori di  $a$  e  $b$  tali che la curva  $\Gamma$  grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in  $x = 1$ .
- b) Si studi e si disegni  $\Gamma$ .
- c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di  $\Gamma$  con l'asse  $x$ .
- d) Si determini l'equazione della curva  $\Gamma'$  simmetrica di  $\Gamma$  rispetto alla retta  $y = y(1)$ ;
- e) Si disegni, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati il grafico di  $y = |x^2 + a \ln(x + b)|$ .

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001**  
**Sessione ordinaria**

**PROBLEMA 2**

a) Il C.E. della funzione è  $x > -b$ . Per il passaggio dall'origine risulta  $a \ln b = 0$  e, poiché  $a \neq 0$  per ipotesi, si deduce che  $\ln b = 0$  da cui  $b = 1$  e quindi  $x > -1$ .

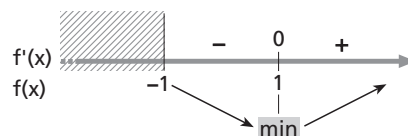
Considerato  $y = x^2 + a \ln(x+1)$ , la condizione necessaria per avere un estremo nel punto  $x = 1$  ri-

chiede che  $y'(1) = 0$ . Dato che  $y'(x) = 2x + \frac{a}{x+1}$ ,  $y'(1) = 2 + \frac{a}{2} = 0 \rightarrow a = -4$ . La funzione ha forma  $y = x^2 - 4 \ln(x+1)$ .

Ora bisogna verificare se  $x = 1$  è un punto di minimo assoluto.

La derivata prima  $y'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = 2 \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$  ha denominatore sempre positivo, pertanto essa è complessivamente positiva se  $x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 1$ . Tenendo conto della condizione di esistenza, si riporta nella figura 5 il quadro della monotonia di  $f$ .

Si ricava che la funzione ha un minimo assoluto in  $x = 1$ .



▲ Figura 5.

b) Data  $f(x) = x^2 - 4 \ln(x+1)$ , per le precedenti considerazioni, essa ha C.E.:  $x > -1$ , minimo assoluto  $M(1; 1 - 4 \ln 2)$  e interseca l'asse  $y$  nell'origine del sistema. Non è possibile determinare in modo esatto i punti di intersezione con l'asse  $x$  perché l'equazione  $x^2 - 4 \ln(x+1) = 0$  non è risolvibile algebricamente e si rimanda al punto c per il calcolo numerico. Si osserva comunque che  $f(2) = 4 - 4 \ln 3 < 0$  e  $f(3) = 9 - 4 \ln 4 > 0$  e, quindi, c'è un'intersezione positiva compresa tra 2 e 3.

I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 4 \ln(x+1)) = +\infty;$$

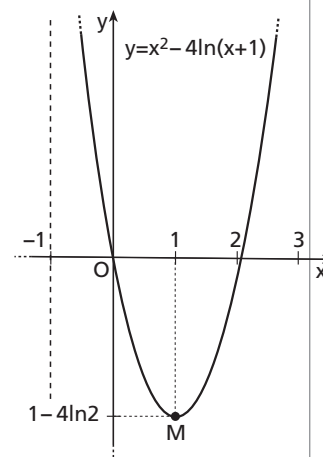
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4 \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - 4 \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = (\text{De L'Hospital}) = +\infty.$$

La funzione ha asintoto verticale  $x = -1$  e non ha asintoti orizzontali.

Inoltre, poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 4 \ln(x+1))}{x} = +\infty, \text{ la funzione non ha asintoti obliqui.}$$

La derivata seconda  $y''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$  è sempre positiva, pertanto la curva ha sempre concavità verso l'alto. La figura 6 rappresenta il grafico di  $\Gamma$ .



▲ Figura 6.

- c) Consideriamo l'intervallo  $[2; 3]$ : poiché  $f(2) < 0$  e  $f(3) > 0$ , esiste solo uno zero in tale intervallo essendo in esso la derivata prima non nulla. Si valuta lo zero attraverso il metodo di bisezione. La tabella di iterazione è la seguente:

| $n$ | $a_n$          | $b_n$           | $m_n$            | $\epsilon_n$   |
|-----|----------------|-----------------|------------------|----------------|
| 0   | 2              | 3               | $\frac{5}{2}$    | $\frac{1}{2}$  |
| 1   | 2              | $\frac{5}{2}$   | $\frac{9}{4}$    | $\frac{1}{4}$  |
| 2   | 2              | $\frac{9}{4}$   | $\frac{17}{8}$   | $\frac{1}{8}$  |
| 3   | $\frac{17}{8}$ | $\frac{9}{4}$   | $\frac{35}{16}$  | $\frac{1}{16}$ |
| 4   | $\frac{17}{8}$ | $\frac{35}{16}$ | $\frac{69}{32}$  | $\frac{1}{32}$ |
| 5   | $\frac{17}{8}$ | $\frac{69}{32}$ | $\frac{137}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

Il valore approssimato dell'intersezione è  $x = \frac{137}{64} \approx 2,14$  con un errore inferiore a  $\frac{1}{64}$  cioè a 0,015625.

- d) Si determini l'equazione della curva  $\Gamma'$  simmetrica di  $\Gamma$  rispetto alla retta  $y = y(1)$ .

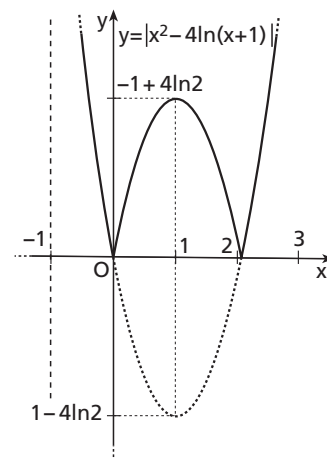
L'asse di simmetria è  $y = y(1)$  cioè la retta parallela all'asse delle  $y$ ,

$y = 1 - 4 \ln 2$ . Le equazioni della simmetria sono  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - 8 \ln 2 - y \end{cases}$ .

La curva trasformata risulta di equazione:

$$y = 4 \ln \frac{x+1}{4} - x^2 + 2.$$

- e) Il grafico di  $y = |x^2 - 4 \ln(x+1)|$  coincide con quello di  $f(x) = x^2 - 4 \ln(x+1)$  per quei valori di  $x$  in cui la funzione  $f$  è positiva o nulla, mentre, per i restanti valori, si traccia la simmetrica rispetto all'asse delle  $x$ . (figura 7).



▲ Figura 7.