

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007**

■ **PROBLEMA 2**

Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\hat{C}AB$  si mantenga doppio dell'angolo  $\hat{A}BC$ .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\hat{A}BC$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se  $\hat{A}BC = 36^\circ$  allora è  $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

### PROBLEMA 2

1. Consideriamo il sistema di riferimento  $Oxy$  centrato in  $A$  e con gli assi cartesiani orientati come in figura 2.

Indichiamo con  $(x; y)$  le generiche coordinate di  $C$  e con  $\alpha$  l'angolo  $\widehat{ABC}$ . Ne segue che  $\widehat{CAB} = 2\alpha$ . Osserviamo che il punto  $C$  deve giacere nel semipiano  $x < \frac{1}{2}$  altrimenti l'angolo  $\widehat{BAC}$  sarebbe minore o uguale ad  $\widehat{ABC}$ .

Tale condizione può essere migliorata, osservando che nel primo quadrante è possibile costruire all'interno del triangolo  $ABC$  il triangolo isoscele  $AA'C$  (poiché  $x < \frac{1}{2}$ ) di altezza  $CD$ , come in figura 3.

L'angolo  $\widehat{BCA'}$  è uguale ad  $\alpha$  in quanto l'angolo supplementare di  $\widehat{CA'B}$  è uguale a  $2\alpha$ .

Quindi  $\overline{CA'} = \overline{A'B} = 1 - 2x$ .

Inoltre, essendo  $CA'$  l'ipotenusa del triangolo rettangolo  $A'CD$  con cateto  $\overline{DA'} = x$ , deve essere  $1 - 2x \geq x$ , cioè  $x \leq \frac{1}{3}$ .

Poiché il problema presenta una simmetria rispetto all'asse  $x$ , limitiamoci a considerare il caso  $y \geq 0$ . Per trovare l'equazione del luogo geometrico possiamo procedere in due modi.

#### Primo metodo

Considerando i triangoli rettangoli ottenuti tracciando l'altezza relativa alla base  $AB$ , risulta:

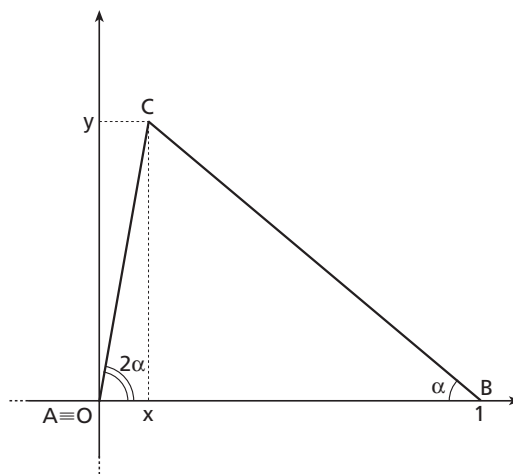
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia  $x \neq 0$ .

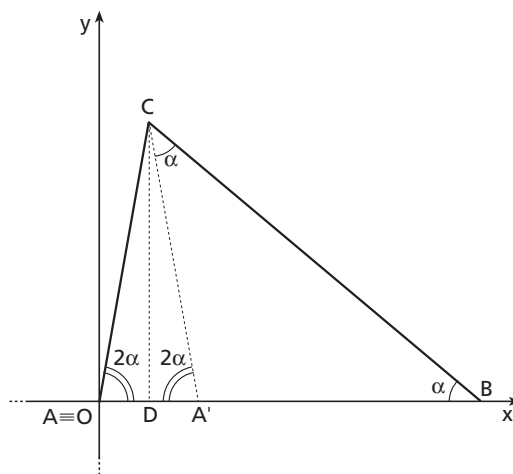
Il caso  $x = 0$  è, comunque, geometricamente accettabile in quanto si otterrebbe il triangolo rettangolo in  $A$  e isoscele, con  $C$  di coordinate  $(0; 1)$ .

Supponiamo, allora,  $x \neq 0$  (e quindi  $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$ ). Dal sistema, ricordando la formula di duplicazione della tangente, otteniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \frac{2 \left( \frac{y}{1-x} \right)}{1 - \left( \frac{y}{1-x} \right)^2} = \frac{y}{x}$$



▲ Figura 2.



▲ Figura 3.

Svolgendo i calcoli e portando il tutto a forma normale otteniamo

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Questa equazione comprende anche il caso  $x = 0$ , poiché la curva passa per il punto  $(0; 1)$ , e i casi simmetrici. Questi ultimi corrispondono a valori negativi di  $y$ .

Essa rappresenta, dunque, l'equazione del luogo geometrico richiesto, considerando però la limitazione  $x \leq \frac{1}{3}$ .

### Secondo metodo

Osserviamo che la figura 3 rappresenta il caso in cui  $x \geq 0$ .

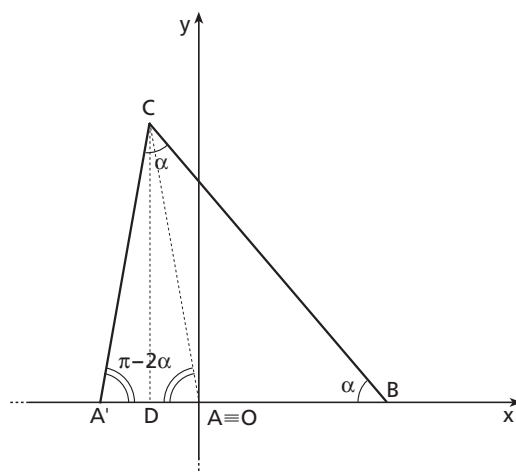
Il caso in cui, invece, si ha  $x < 0$  è rappresentato in figura 4. In questo caso è possibile costruire un triangolo isoscele  $A'AC$ , esterno al triangolo  $ABC$ , di altezza  $CD$ . L'angolo  $\widehat{CA'A}$  è uguale a  $\pi - 2\alpha$ , in quanto l'angolo supplementare  $\widehat{CAB}$  è uguale a  $2\alpha$ . Ne segue che anche il triangolo  $A'BC$  è isoscele, in quanto  $\widehat{A'CB} = \widehat{A'BC} = \alpha$ .

Consideriamo il triangolo rettangolo  $CDA$ , in cui  $CD = y$ ; vale inoltre che  $AD = -x$  e  $AC = A'B = 1 - 2x$ .

In entrambi i casi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $CDA'$ , otteniamo che

$$x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$$

che è l'equazione del luogo cercato.



▲ Figura 4.

2. Riscrivendo, con il metodo del completamento dei quadrati, l'equazione nella forma

$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

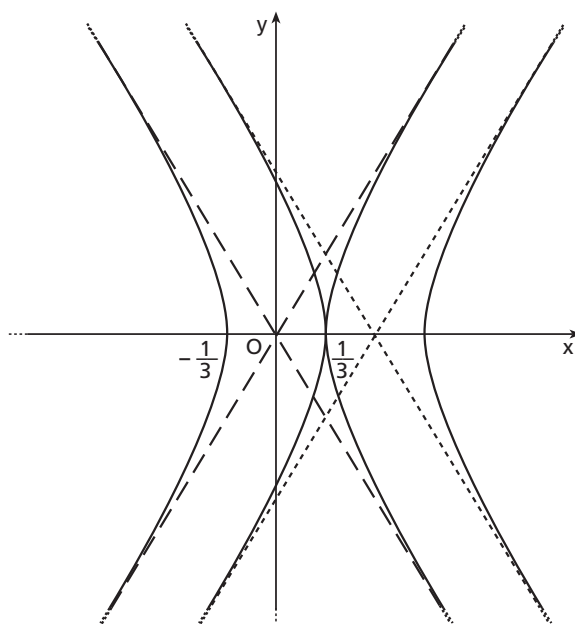
è facile riconoscere che tale curva è l'iperbole che si ottiene dalla traslazione rispetto al vettore

$\vec{v}\left(\frac{2}{3}; 0\right)$  dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

che ha vertici in  $\left(\pm \frac{1}{3}; 0\right)$  e asintoti  $y = \pm \sqrt{3}x$  (figura 5).

Tenendo conto delle limitazioni geometriche,  $\gamma$  è il ramo sinistro di tale iperbole traslata.



▲ Figura 5.

3. Siano  $H$  e  $K$  i piedi delle altezze relative ai lati  $CB$  e  $AC$ , ne segue che  $AH = \sin \alpha$  e  $BK = \sin(2\alpha)$ .

Inoltre, vale  $\alpha < \frac{\pi}{3}$  perché  $\alpha + 2\alpha < \pi$  (in quanto due angoli interni di uno stesso triangolo).

Supponiamo, quindi,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$  e cerchiamo il massimo in tale dominio della funzione  $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \sin^2(2\alpha)$ . Per farlo calcoliamo la derivata prima della funzione  $f(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) + 4 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \\ &= \sin(2\alpha)[1 + 4 \cos(2\alpha)]; \end{aligned}$$

$\sin(2\alpha)$  è sempre positivo in  $\left]0; \frac{\pi}{3}\right]$ , quindi  $f'(\alpha) \geq 0$  se  $1 + 4 \cos(2\alpha) \geq 0$ .

$$1 + 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) \geq 0 \rightarrow \sin^2 \alpha \leq \frac{5}{8} \rightarrow 0 < \alpha \leq \arcsen \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Riportiamo l'andamento della funzione in figura 7.

Quindi l'ampiezza dell'angolo  $\hat{A}BC$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze  $AH$  e  $BK$  è

$$\hat{A}BC = \arcsen \sqrt{\frac{5}{8}} \approx 52^\circ 14'.$$

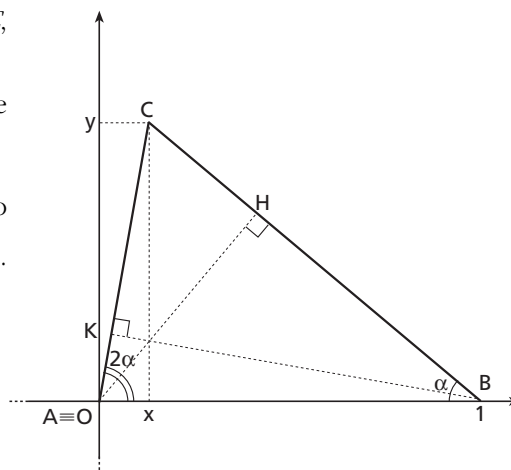
4. Per  $\alpha = 36^\circ$  si ottiene un triangolo isoscele  $ABC$  di angoli  $\hat{C}AB = \hat{A}CB = 72^\circ$  e lati  $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ . Tracciando la bisettrice dell'angolo  $\hat{C}AB$  che interseca il lato  $BC$  nel punto  $M$  si ottiene il triangolo  $ACM$  simile al triangolo  $ABC$  poiché equiangoli, come mostrato in figura 8. Se chiamiamo  $\overline{AC} = x$  risulta  $\overline{AM} = x$ ,  $\overline{BM} = x$  e  $\overline{CM} = 1 - x$ .

Per similitudine otteniamo:

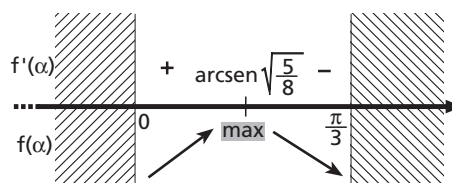
$$\overline{CM} : \overline{CA} = \overline{CA} : 1, \text{ cioè } 1 - x : x = x : 1,$$

$$\text{e quindi } x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0,$$

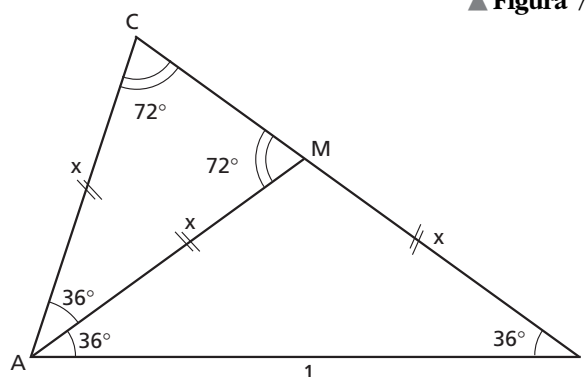
$$\text{la cui soluzione positiva è } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



▲ Figura 6.



▲ Figura 7.



▲ Figura 8.