6 Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b?

6 L'equazione possiede tre radici reali se la funzione $x^3 + bx - 7 = 0$, continua e derivabile ovunque, interseca tre volte l'asse delle ascisse. La cubica deve possedere un massimo e un minimo relativo e questi devono avere segno discorde. La derivata prima $f'(x) = 3x^2 + b$ possiede due radici distinte, $x = \pm\sqrt{\frac{-b}{3}}$, se $b < 0$. $f'(x) = 3x^2 + b > 0$, se $x < -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ o $x > \sqrt{\frac{-b}{3}}$. Lo schema in figura 8 mostra che per $x = -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un massimo e per $x = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un minimo.

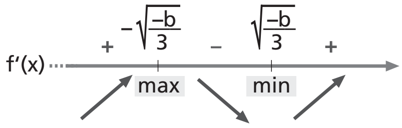

Figura 8.

$$f\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) < 0 \Rightarrow \frac{2b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - 7 < 0,\ \forall b < 0.$$ Poiché $f(0) = -7$, il minimo è sempre negativo.

Invece: $f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) > 0 \Rightarrow \frac{b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -b^3 > \frac{49 \cdot 27}{4} \Rightarrow b < \sqrt[3]{\frac{-1323}{4}} \cong -6{,}92.$

Quindi $b = -7$, per esempio soddisfa già la condizione richiesta.