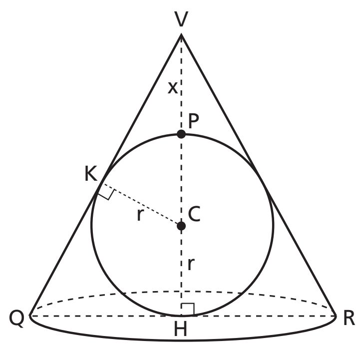
10 Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti a una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

10 È data la sfera di centro C e raggio r e un cono circolare retto di vertice V e raggio di base HR (figura 9).

Si pone $\overline{PV} = x$, con $x > 0$.
Risulta $\overline{VH} = x + 2r$ e $\overline{VC} = x + r$.
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo KCV e otteniamo:

$$\overline{KV} = \sqrt{\overline{VC}^2 - \overline{KC}^2} = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}.$$



▲ **Figura 9.**

Sfruttiamo ora la similitudine tra i triangoli rettangoli KCV e QHV:

$$\overline{QH} : \overline{KC} = \overline{VH} : \overline{KV} \rightarrow \overline{QH} = \frac{\overline{KC} \cdot \overline{VH}}{\overline{KV}} = \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}.$$

Per il teorema delle tangenti risulta $\overline{QH} = \overline{QK}$ e quindi:

$$\overline{QV} = \overline{QK} + \overline{KV} = \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}} + \sqrt{x^2+2rx} = \frac{x^2+3rx+2r^2}{\sqrt{x^2+2rx}}.$$

Calcoliamo l'area laterale $A(x)$ del cono:

$$A(x) = \frac{1}{2}(2\pi \overline{QH} \cdot \overline{QV}) = \pi \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}} \cdot \frac{x^2+3rx+2r^2}{\sqrt{x^2+2rx}} = \pi r \frac{x^2+3rx+2r^2}{x} = \pi r\left(x + 3r + \frac{2r^2}{x}\right).$$

Minimizziamo tale area calcolando la derivata prima e studiandone il segno:

$$A'(x) = \pi r\left(1 - \frac{2r^2}{x^2}\right) \rightarrow A'(x) = \pi r\left(\frac{x^2 - 2r^2}{x^2}\right).$$

Tenendo conto del limite geometrico $x > 0$, risulta:

$A'(x) = 0$ per $x = r\sqrt{2}$,
$A'(x) > 0$ per $x > r\sqrt{2}$,
$A'(x) < 0$ per $0 < x < r\sqrt{2}$.

La funzione area laterale ha quindi minimo per $x = r\sqrt{2}$.